به نام خدا

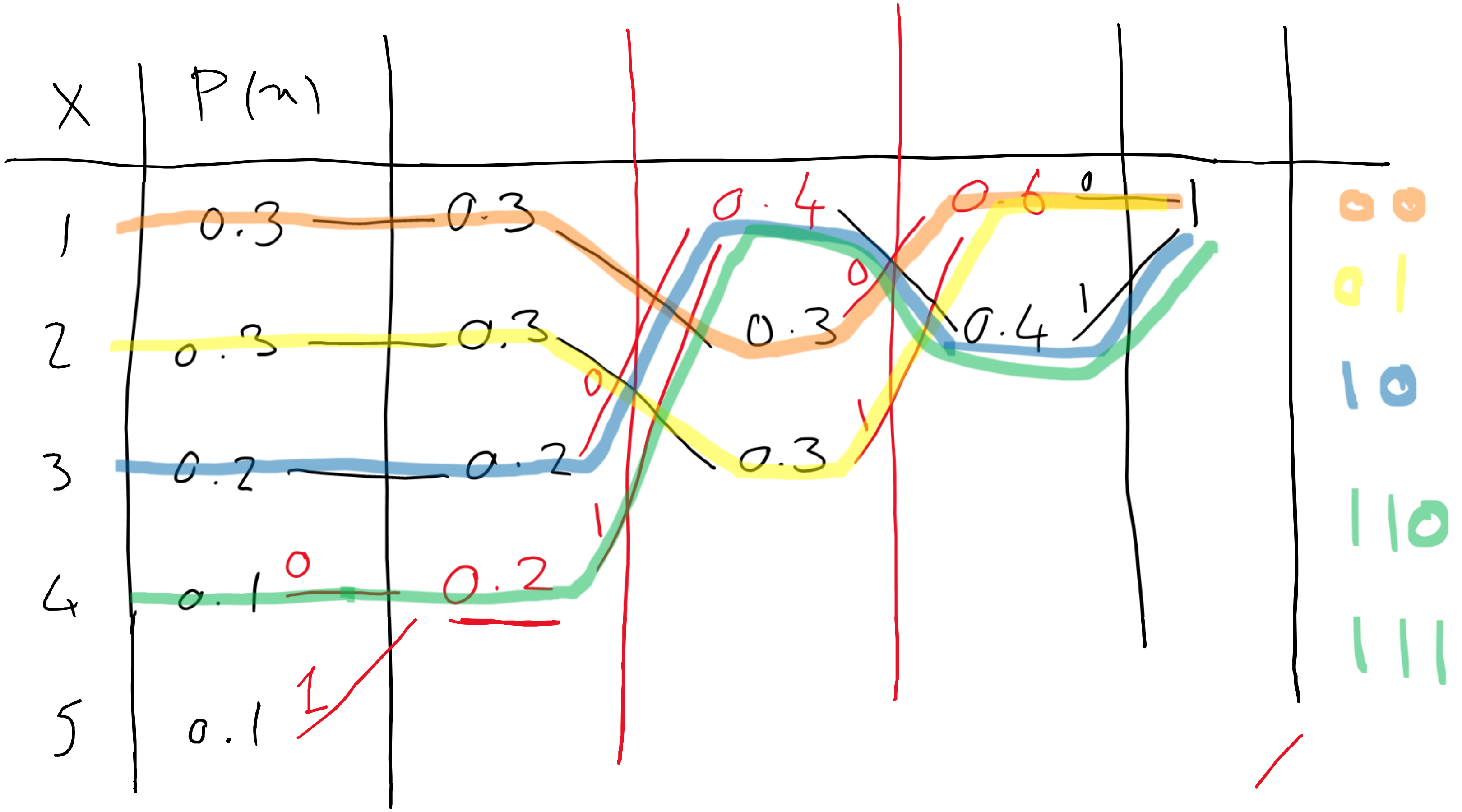
- کدینگ منبع ✓
- کدینگ Shannon-Fano ✓
- کدینگ هافمن Huffman ✓

ahaghbin@gmail.com

تمرین سری 1 , 2 3 تمرین‌های کلاسی

(به عنوان فرصت)

مثال - برای منبع زیر کد هافمن باینری (Binary) را به دست بیاورید.



تمرین: در مرحله ی دوم پس از ترکیب سمبل 4 ، 5 ، سمبل جدید با احتمال 0.2 را به جای ردیف چهارم در ردیف سوم قرار دهید.

$$L = E\{l(x)\} = \sum_{x} p(x)\, l(x) = (0.3 + 0.2 + 0.2) \times 2$$

$$+ (0.1 + 0.1) \times 3$$

$$\Rightarrow L = 2$$

$$H(X) = E\left\{\lg \frac{1}{p(X)}\right\} = \sum_{x} p(x) \lg \frac{1}{p(x)} =$$

$$= 0.3 \lg \frac{10}{3} + 2 \times 0.2 \lg 5 + 2 \times 0.1 \lg 10 =$$

تمرین: برای منبع زیر کد هافمن باینری را بدست بیاورید

X	$P(x)$
1	$1/2$
2	$1/3$
3	$1/4$
4	$1/12$

نکته دوم: در تعیین کد منبع براساس الگوریتم هافمن، در بعضی موارد (برای $M \geq 3$)
ممکن است در مرحله‌ی آخر، درخت کد کامل نشود. در این صورت لازم است که در مرحله
اول، به تعداد لازم سمبل Dummy (با احتمال صفر) به خروجی های منبع اضافه کنیم
تا در مرحله‌ی آخر درخت کامل باشد و به تعداد کافی (M سمبل) برای ترکیب کردن
داشته باشیم.

سمبل باقی مانده در مرحله آخر

$$|X| = K\underbrace{(M-1)}\ + 1$$

1

$\exists\, K \in N$

از هر مرحله M سمبل با هم ترکیب می‌شوند
و یک سمبل جدید می‌سازند

* اگر شرط ① برقرار نبود، به تعدادی که شرط برقرار شود، سمبل Dummy با احتمال صفر به خروجی های منبع اضافه می کنیم.

مثال: برای منبع زیر کد هافمن ternary را به دست بیاورید.

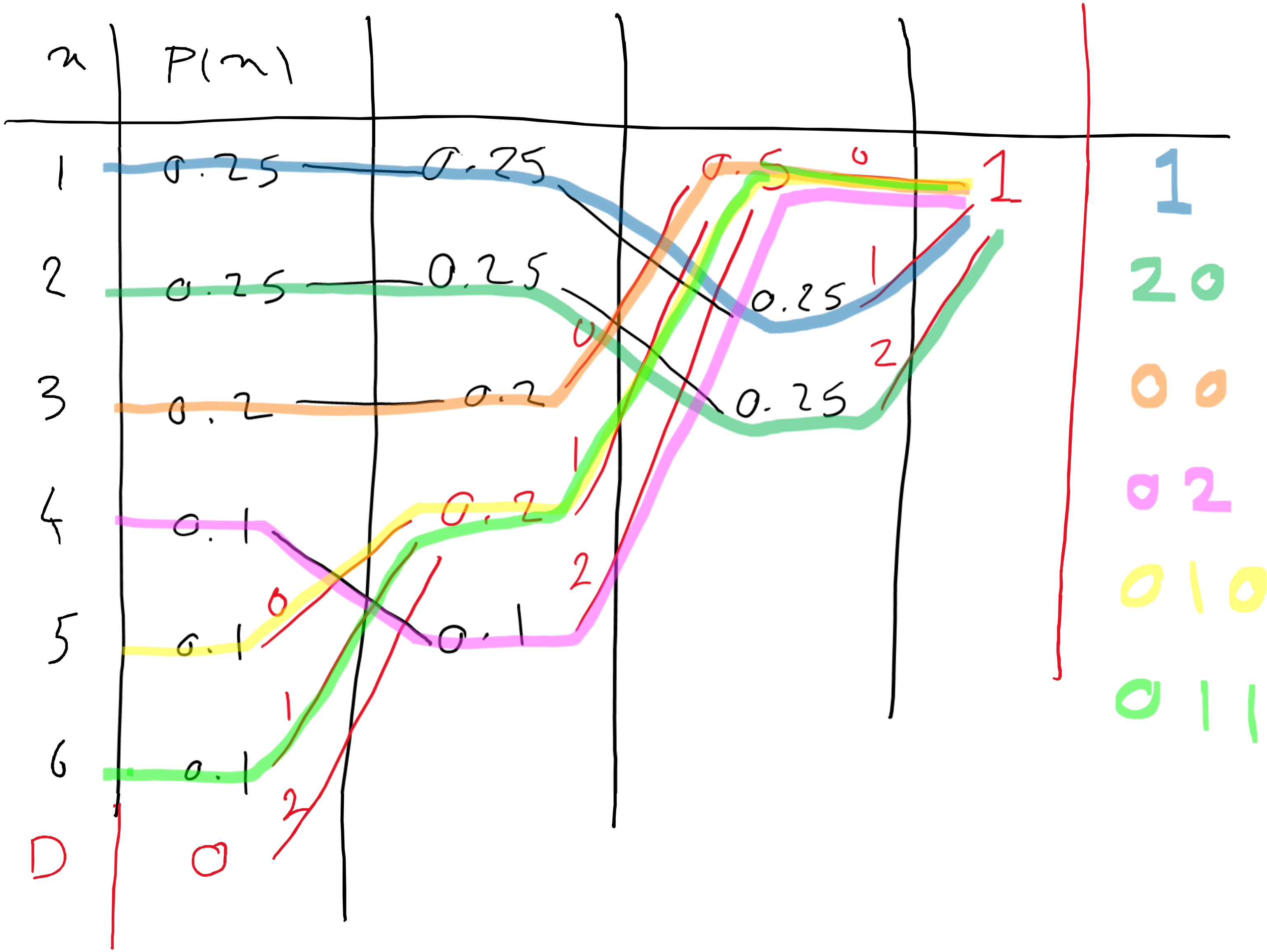
$M = 3$

$|\chi| = 6$

$$\overbrace{|\chi|}^{6} = k\overbrace{(M-1)}^{2} + 1$$

لازم است که یک سمبل Dummy اضافه شود

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.25	0.25	0.2	0.1	0.1	0.1



x
P(x)
1
2
3
4
5
6
0.25
0.25
0.2
0.1
0.1
0.1
0.25
0.25
0.2
0.2
0.1
0.5
0.25
0.25
1
D
0
1
2
0
1
2
0
1
2
0
1
2
1
20
00
02
010
011

تمرین : برای کد مثال قبل L و H(X) را مقایسه کنید.

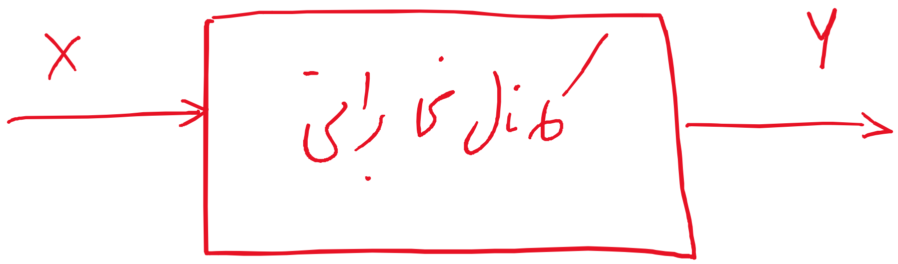
* بدون گذاشتن سمبل Dummy مثال قبل را حل کنید و کامل نبودن درخت را بررسی کنید

مسئله کدینگ منبع	ظرفیت کانال
$L \geq H(X)$	$R \leq C$
$\min I(X;\hat{X})$	$\max I(X;Y)$
$R(D)$, $R \leq D$	

در ادامه بحث می خواهیم به مسئله ظرفیت کانال بپردازیم. همان طور که گفتیم، اگر اطلاعات را با نرخی کمتر یا مساوی یک حد (که به آن ظرفیت کانال می گوییم) ارسال کنیم، می توانیم اطلاعات را با خطای به میزان دلخواه کم، در گیرنده بازیابی کنیم. البته نیاز به یک تصویرسازی (کدینگ کانال) نیز داریم. یعنی همواره شرط $R < C$ برای انتقال قابل اطمینان اطلاعات باید برقرار باشد.

نرخ ارسال اطلاعات

ظرفیت کانال



براساس قضیه شانون، ظرفیت اطلاعاتی کانال برابر است با

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$

که برابر ظرفیت عملی کانال نیز هست. ظرفیت عملی کانال برابر تعداد بیتهای ممکن برای ارسال در هر بار استفاده از کانال است و واحد آن bits/channel use است.

کانال های مخابراتی را می توانیم به دو دسته کلی کانال های پیوسته و کانال های گسسته تقسیم بندی کنیم.

- اگر ورودی و خروجی کانال از مجموعه های شمارش ناپذیر باشند، کانال را پیوسته می گوییم.
- اگر ورودی و خروجی کانال از مجموعه های شمارش پذیر (گسسته) باشند، کانال را گسسته می گوییم.

- در این درس تمرکز ما بررسی کانال های گسسته است.

(در این بخش $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ شمارش‌پذیر هستند)

$y \in \mathcal{Y}$

$x \in \mathcal{X}$

کانال‌های مخابراتی را با یک تابع احتمالاتی به فرم زیر می‌شناسیم که به آن مشخصه کانال نیز گفته می‌شود

$$P(y_n \mid \underbrace{y_{n-1}, \dots, y_1}_{\text{خروجی لحظات قبل}}, x_n, \underbrace{x_{n-1}, \dots, x_1}_{\text{ورودی لحظات قبل}}) = P(y_n \mid x_n)$$

(مستقل از طریق فیدبک)

کانال بدون حافظه (و بدون فیدبک)

در این درس برای سادگی ، کانال های بدون حافظه را در نظر می گیریم و $P(y|x)$ را به عنوان مشخصه کانال در نظر می گیریم.

با در نظر گرفتن این شرایط داریم ، با داشتن $P(y|x)$ به عنوان مشخصه کانال ظرفیت اطلاعاتی کانال از

$$C = \max_{P(x)} I(X;Y)$$

رابطه مقابل به دست می آید

که برابر ظرفیت عملی کانال نیز هست (قضیه ظرفیت شانون)

$f(y|x)$ ، $P(y|x)$ $= P_r\{Y=y \mid X=x\}$ شرطی pmf

$X=x$

$Y=y$

$X=x$

بنابراین مسئله ظرفیت کانال، معادل حل کردن مسئله ماکزیمم سازی زیر است،

با داشتن $P(y|x)$

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$

$$C = \max_{p(x)} \left[H(Y) - H(Y|X) \right]$$

به عنوان راه حل کلاسیک معمولاً از این رابطه در حل مسائل استفاده می‌شود زیرا $P(y|x)$ را در اختیار داریم

یا

$$C = \max_{p(x)} \left[H(X) - H(X|Y) \right]$$

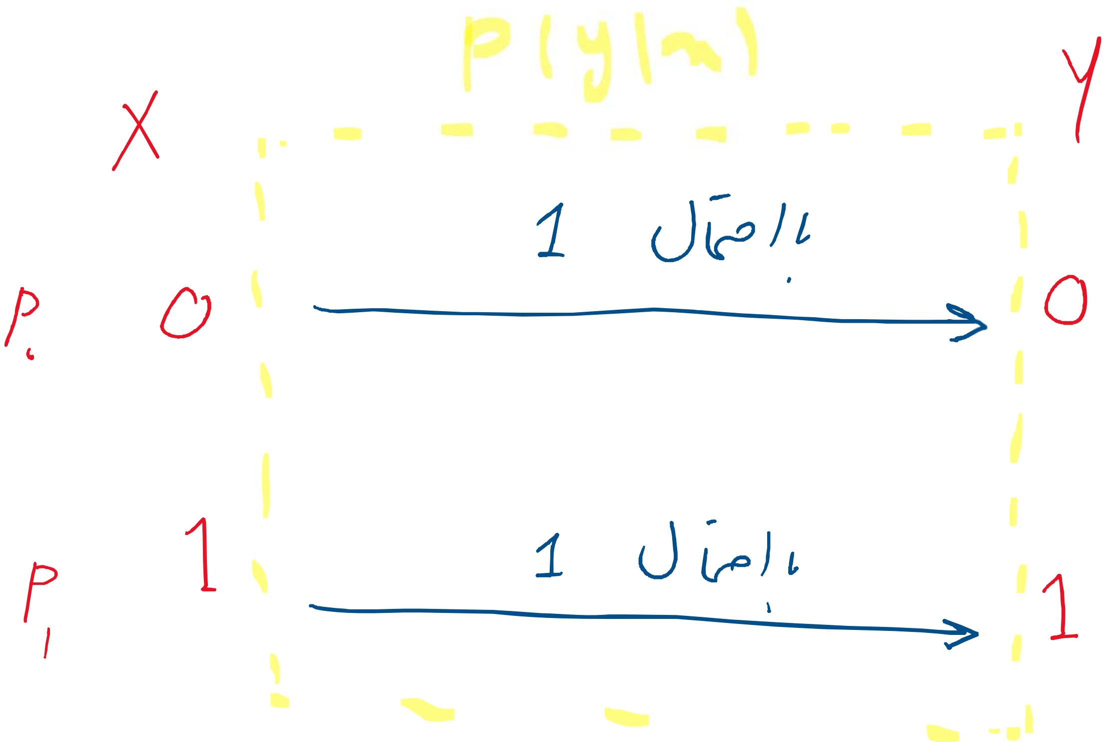
در بعضی موارد که ساختار کانال به گونه‌ای است که محاسبه $H(X), H(X|Y)$ را ساده می‌کند.

یا

$$C = \max \left(H(X) + H(Y) - H(X,Y) \right]$$

در ادامه می‌خواهیم با کمک چند مثال ساده با مفهوم ظرفیت کانال آشنا شویم.

مثال ۱ـ کانال باینری بدون نویز (کانال با ورودی و خروجی باینری بدون وجود نویز)



$$P(y=0 \mid x=0) = 1$$

$$P(y=1 \mid x=0) = 0$$

$$P(y=1 \mid x=1) = 1$$

$$P(y=0 \mid x=1) = 0$$

ظرفیت عملی کانال = ماکزیمم تعداد بیت‌هایی که در هر بار استفاده از کانال بدون خطا می‌توانیم ارسال کنیم = 1 bit/ch. use

ظرفیت اطلاعاتی کانال نیز به صورت زیر قابل محاسبه است

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \left[H(X) - H(X|Y) \right]$$

با توجه به ساختار کانال، اگر $Y=0$ برقرار باشد داریم $X=0$

و اگر $Y=1$ برقرار باشد داریم $X=1$

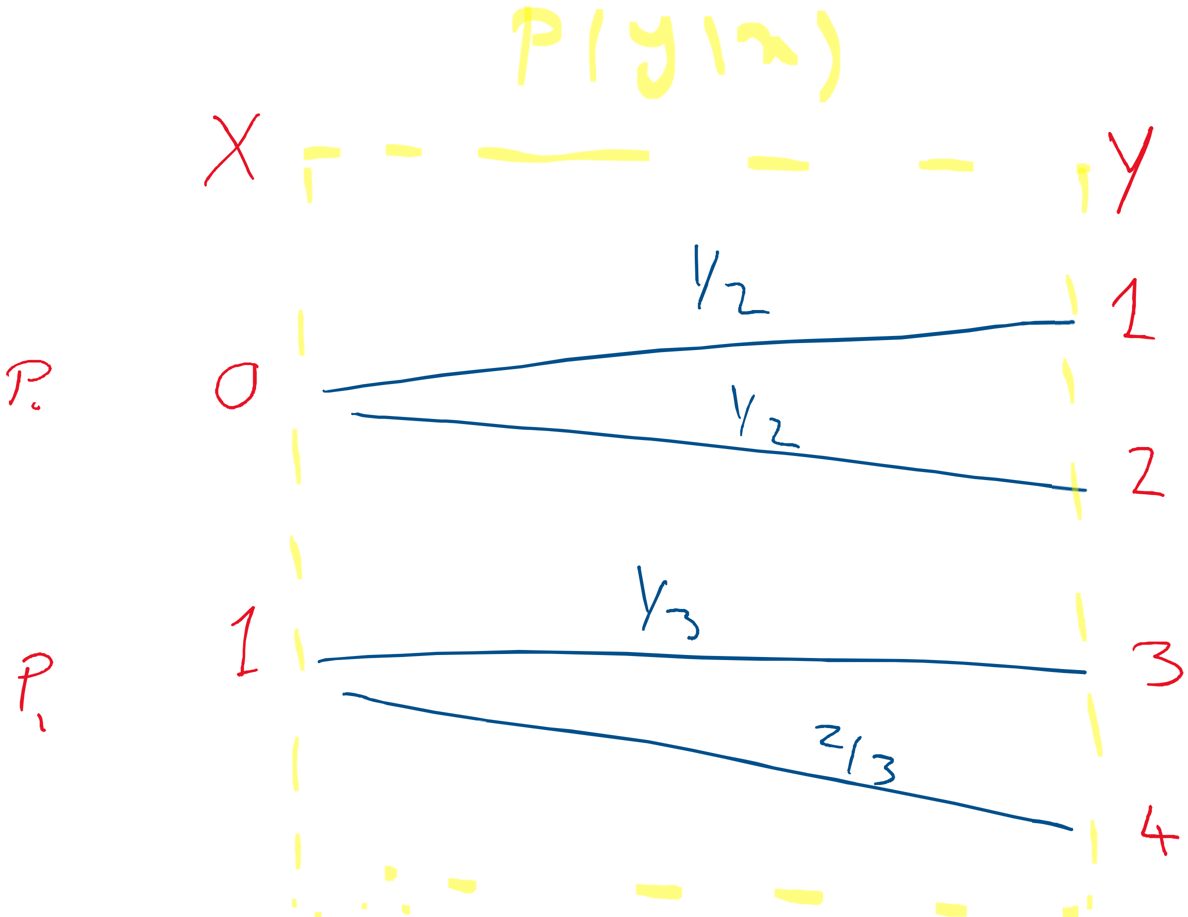
(یعنی با معلوم بودن Y، X به طور کامل مشخص است و $H(X|Y)=0$)

$$\Longrightarrow \quad C = \max_{p(x)} H(X) = \max_{p(x)} H(p_0) = 1$$

به ازای توزیع یکنواخت X یعنی

$$p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$$

مثال 2 - کانال نویزی با خروجی های ناهمپوشان



$$P(y=1 \mid x=0) = 1/2$$

$$P(y=2 \mid x=0) = 1/2$$

$$P(y=3 \mid x=1) = \frac{1}{3}$$

$$P(y=4 \mid x=1) = \frac{2}{3}$$

$$P(y=1 \mid x=1) = 0$$

ظرفیت عملی این کانال برابر $1\ \text{bit}/\text{ch use}$ است زیرا در هر بار استفاده از کانال می‌توانیم 1 بیت اطلاعات را بدون خطا ارسال کنیم. اگر در خروجی $\underbrace{1 \text{ و } 2}_{y=1,\ y=2}$ را دریافت کنیم، متوجه می‌شویم که بیت '0' ارسال شده است یعنی $x = 0$

و اگر در خروجی $y = 3$ یا $y = 4$ دریافت کنیم، متوجه می‌شویم که بیت '1' ارسال شده است یعنی $X = 1$

(یعنی با معلوم بودن Y ، X به طور کامل مشخص است!)

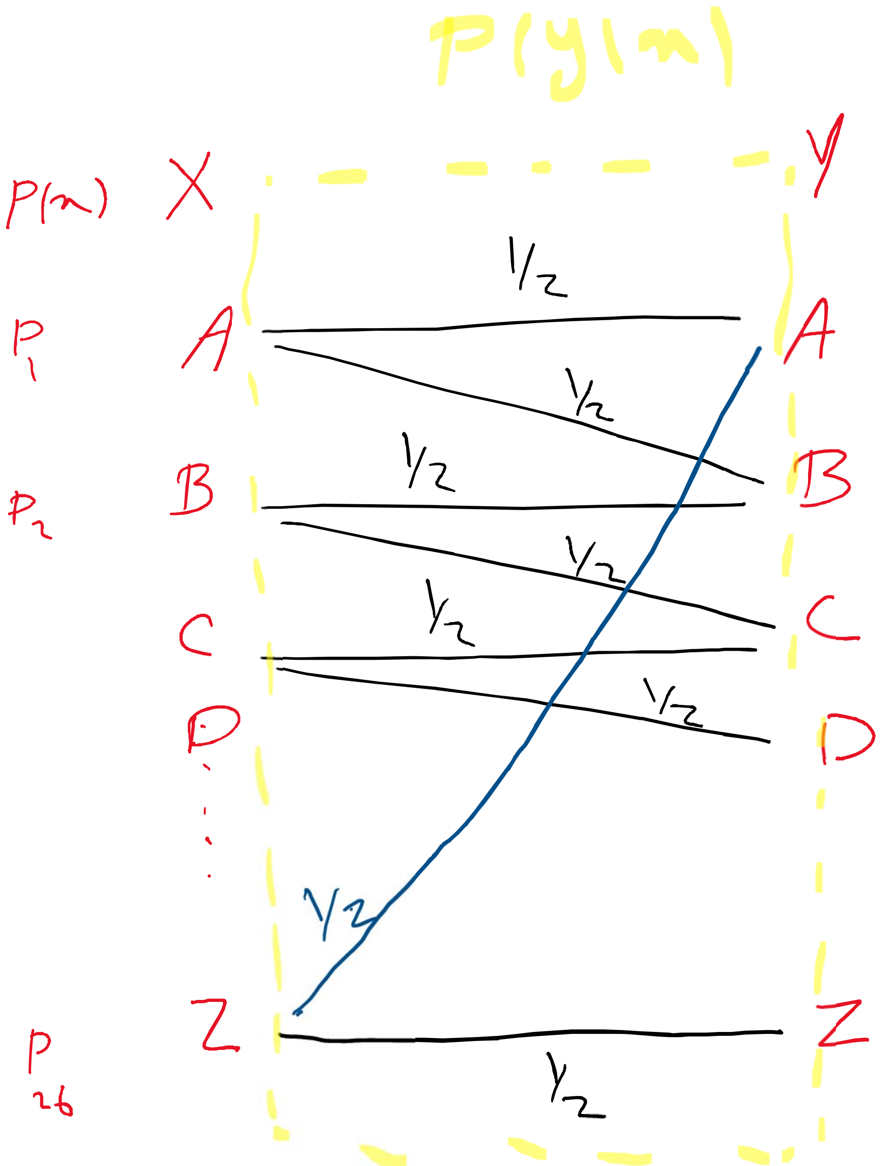
ظرفیت اطلاعات کانال را با محاسبات زیر به دست می‌آوریم

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \max_{p(x)} \Big[H(X) - \underbrace{H(X|Y)}_{=0} \Big]$$

زیرا با معلوم بودن Y، X به طور کامل مشخص است.

$$\Rightarrow C = \max_{p(x)} H(X) = \max_{p(x)} H(P_0) = 1$$

$P_0 = P_1 = 1/2$ به ازای توزیع یکنواخت X به دست می‌آید



مثال 3 - ماشین تحریر خطادار

ظرفیت های این کانال برابر log 13 است. زیرا می توانیم از بین 26 حرف الفبا، 13 حرف را به صورت یک در میان انتخاب کنیم. در این صورت خروجی ها ناهمپوشان خواهند بود و در هر بار استفاده از کانال به اندازه log 13 بیت را بدون خطا می توانیم ارسال کنیم.

برای محاسبه ظرفیت اطلاعاتی کانال به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$C = \max_{P(x)} I(X;Y) = \max_{P(x)} \left[H(Y) - H(Y|X) \right]$$

با توجه به داشتن $P(y|x)$ می‌توانیم $H(Y|X)$ را به راحتی محاسبه کنیم. برای محاسبه‌ی $H(y)$ لازم است که احتمال حالت‌های مختلف y را با کمک قضیه احتمال کلی محاسبه کنیم و سپس ماکزیمم‌سازی را روی مقادیر مختلف $P(x)$ انجام دهیم.

$$C = \max_{p(x)} \left[H(y) - H(y|x) \right]$$

از طرف دیگر می دانیم که

$$H(y|x) = E_{p(x)} \left\{ H(y|x=x) \right\}$$

$$= \sum_{x=A}^{Z} p(x) \underbrace{H(y|x=x)}_{H(1/2)} = H(1/2) \underbrace{\sum p(x)}_{1}$$

$$H(y|x) = H\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad C = \max_{p(x)} \left[H(Y) - 1 \right] = \max_{p(x)} H(Y) - 1$$

برای به دست آوردن $H(Y)$ باید ابتدا $p(y)$ را به دست بیاوریم. برای این کار از قضیه احتمال کل کمک می‌گیریم.

$$P(y = A) = P(A)\, P(Y = A \mid X = A) + P(Z)\, P(Y = A \mid X = Z)$$

$$= P_1 \tfrac{1}{2} + P_{26} \tfrac{1}{2} = \frac{1}{2}(P_1 + P_{26})$$

به طریق مشابه

$$P(Y = B) = \frac{1}{2}(P_2 + P_1)$$

$$P(y=c) = \frac{1}{2}\left(P_3 + P_2\right)$$

$$\vdots$$

بنابراین $H(Y)$ را با داشتن $P(x)$ قابل محاسبه است.

$$H(Y) = E\left\{\log \frac{1}{P(Y)}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial H(Y)}{\partial P_0} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial H(Y)}{\partial P_1} = 0 \\[2ex] \vdots \\[2ex] \dfrac{\partial H(Y)}{\partial P_{26}} = 0 \end{array}\right.$$

در این مسئله به دلیل تقارن، نیازی به مشتق گیری و حل دستگاه معادلات خطی نیست

می دانیم که $H(Y)$ به ازای توزیع یکنواخت Y ماکزیمم می شود و به دلیل تقارن

توزیع یکنواخت X، توزیع یکنواخت Y را نتیجه می دهد.

$P(x)$: یکنواخت $\Longrightarrow$

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_{26} = \frac{1}{26} = \frac{1}{|\mathcal{X}|}$$

یکنواخت $P(y) \Longrightarrow H_{max}(y) = \log|\mathcal{X}|$

$$, \quad |\mathcal{Y}| = |\mathcal{X}|$$

$$\Rightarrow \quad C = \max_{p(x)} H(y) - 1$$

$$C = H_{max}(y) - 1 = \log 26 - 1 = \log 13$$

توزیع یکنواخت x